

ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

ÜBUNGSBLATT 5

1. Ist $f : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus so gilt $\text{ord}(f(x)) \leq \text{ord}(x)$ für jedes $x \in G$. Mehr, falls $\text{ord}(x) < \infty$ then $\text{ord}(f(x)) \mid \text{ord}(x)$.
2. Ist $(G, +)$ eine abelsche Gruppe so gilt $\text{T}(G) \leq G$, wobei
$$\text{T}(G) = \{x \in G \mid \text{ord}(x) < \infty\}.$$
3. Man betrachte die Untergruppen $n\mathbb{Z}$ und $m\mathbb{Z}$ von \mathbb{Z} . Man zeige:
 - a) $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z}$ g.d.w. $m \mid n$.
 - b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \text{kgV}(n, m)\mathbb{Z}$.
 - c) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \text{ggT}(n, m)\mathbb{Z}$.
4. Sei (G, \cdot) eine Gruppe.
 - a) $\text{ord}(x) = \text{ord}(x^{-1})$ für alle $x \in G$.
 - b) Ist $x \in G$ mit $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$, so gilt $\text{ord}(x^k) = \frac{n}{\text{ggT}(n, k)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
 - c) Ist $x \in G$ mit $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$, so gilt $\text{ord}(x^k) = m$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ so dass $n = km$.
 - d) Ist $G = \langle x \rangle$ eine zyklische Gruppe, so gilt $G = \langle x^k \rangle$ für $k \in \mathbb{Z}$ g.d.w. $\text{ggT}(n, k) = 1$.
5. Sei (G, \cdot) eine Gruppe, und seien $x, y \in G$ so dass $xy = yx$. Man zeige, dass $\text{ord}(xy) = \text{ord}(yx)$.
6. a) Sei (G, \cdot) eine Gruppe, und seien $x, y \in G$ so dass $xy = yx$, mit $n = \text{ord}(x) < \infty$ und $m = \text{ord}(y) < \infty$. Man zeige:
 - a) $\text{ord}(xy) < \infty$ und $\text{ord}(xy) \mid \text{kgV}(n, m)$.
 - b) Ist $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 1$, so gilt $\text{ord}(xy) = \text{kgV}(n, m)$.
 - c) Ist $\text{ggT}(n, m) = 1$, so gilt $\text{ord}(xy) = nm$ und $\langle x, y \rangle = \langle xy \rangle$.
7. Sind G und H zyklische Gruppen mit $|G| = n$ und $|H| = m$ so ist $G \times H$ zyklisch g.d.w. $\text{ggT}(n, m) = 1$.
8. Die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist nicht zyklisch.
9. Man bestimme alle Untergruppen und alle Faktorgruppen der Gruppe $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
10. Man finde ein Beispiel von zwei Elemente x, y einer Gruppe G , so dass $\text{ord}(x) < \infty$, $\text{ord}(y) < \infty$ aber $\text{ord}(xy) = \infty$.

"BABEȘ-BOLYAI" UNIVERSITÄT, FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK, RO-400084, CLUJ-NAPOCA, RUMÄNIEN

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`